***Лекция 5***

**КИНЕМАТИКА ТОЧКИ**

**Системы отсчета**

***Кинематика -*** раздел механики, в котором изучаются способы описания движения точки и твердого тела. Движение изучается во времени и по отношению к определенной системе отсчета- “жесткому” трехмерному ориентированному пространству, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять в нем расстояния и время. С системой отсчета можно связать множество систем координат, но все они будут принадлежать одной системе отсчета.

Время t считается скаляром, монотонно возрастающим с момента , называемого ***начальным моментом***. В классической механике время считается одинаковым во всех системах отсчета.

**Способы задания движения точки**

Задать движение, значит указать способ определения положения точки в пространстве в любой момент времени t. Рассматривается три способа задания движения точки: ***векторный, координатный и естественный***.

***Векторный способ.***

Этот способ является основным, поскольку большинство характеристик движения являются векторными величинами. Положение изучаемой точки М по отношению к наблюдателю О в данный момент времени t задается радиусом вектором точки (Рис.1).

М

х

у

z

**r**(t)

x(t)

y(t)

z(t)

ϕ

θ

Рис.1

о

ρ

Вектор - функция скалярного аргумента t является векторным законом движения точки М. С течением времени направление и модуль радиуса - вектора изменяются и точка М описывает кривую, называемую ***траекторией точки.***

***Годографом*** вектор - функции называется кривая, которую описывает конец вектора при изменении скалярного аргумента, если начало вектора зафиксировано. Очевидно, что годографом радиуса - вектора точки является ее траектория.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

***Координатный способ***

Если с системой отсчета связать систему координат, например, декартову , то радиус - вектор можно задать его проекциями

которые являются законом движения точки М в декартовых координатах. Закон движения задает в параметрическом виде (параметр - время t) траекторию движения точки. Если из закона исключить время, то получим уравнение кривой, по которой движется точка

Траекторией будет та часть кривой, которая соответствует

В *цилиндрических координатах* закон движения точки имеет вид

•

•

M

Mo

σ(t)

τ

Рис.2

+

\_

В *сферических* координатах

(3)

***Естественный способ***

Этот способ применяется, когда заранее известна траектория движения точки (Рис.2). Рельсы, например, определяют траекторию трамвая, поэтому здесь уместен естественный способ.

Чтобы в произвольный момент времени указать положение точки на траектории, достаточно выбрать на ней начало , направление положительного отсчета (+) и задать функцию ***криволинейной координаты*** длину дуги с соответствующим знаком.

-

В качестве начала удобно выбирать начальное положение точки при , а за положительное- направление движения точки в этот момент.

Функция (t) называется ***естественным законом движения*** точки. Ее не следует путать с пройденным путем , который является монотонно возрастающей функцией. Координата же может менять знак и обращаться в ноль. Так для трамвая, вернувшегося в депо, координата обращается в ноль, в то время как пройденный путь достигает максимального значения (Рис.3).



Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Производная вектор - функции по скалярному аргументу.**

Рассмотрим вектор - функцию скалярного аргумента . При изменении параметра u конец вектора **a** описывает годограф (Рис.4). Приращение аргумента вызывает приращение вектор – функции Пусть аргумент уменьшился Тогда вектор направлен противоположно приращению .



***Производной вектор - функции***  ***по скалярному аргументу*** называется вектор

При стремлении приращения аргумента к нулю секущая займет положение касательной τ. Таким образом, ***векторная производная* *всегда направлена по касательной к годографу вектор - функции***.

Рассмотрим основные свойства векторной производной.

1. Производная векторно - постоянной функции равна нулю:
2. Производная вектор - функции, постоянной только по модулю, не равна нулю. В этом случае годограф функции лежит на сфере радиуса а, поэтому производная, касательная к годографу, будет перпендикулярна самому вектору **а**.

Такими векторами являются, например, векторы, соединяющие две точки твердого тела.

Далее идут свойства, вытекающие из линейности оператора дифференцирования

2. (порядок сомножителей менять можно !)
3. (порядок сомножителей менять нельзя !)

Докажем последнее, практически важное свойство:

1. ***Проекция производной равна производной от соответствующей проекции***

Запишем вектор **а**  в проекциях на оси с ортами

Возьмем производную по времени, учитывая, что орты постоянны:

С другой стороны производную тоже можно представить через проекции

Сравнивая два разложения, приходим к выводу, что свойство 7 справедливо.

В механике принято производную по времени для краткости обозначать точкой над буквой:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Скорость точки при векторном и координатном способах задания движения точки.**

***Векторный способ***

Скорость и ускорение точки являются векторными величинами, поэтому определим их в векторном способе задания движения.

**r**(t)

**v**

**τ**

Рис.5

М

***Скоростью точки называется вектор***

Из определения следует, что скорость направлена по касательной к годографу радиуса - вектора , т.е. к траектории точки. Скорость направлена в сторону движения точки М по траектории.

***Координатный способ***

Дифференцируя

по времени получим

(9)

Таким образом, по закону движения можно найти вектор **:**

***Естественный способ***

***Формулы Френе.***

(t)

**V**

М1

**b**

**n**

****

O1

**r**(t)

M

O

Mo



Рис.6

Пусть задан закон движения точки по траектории  
  
Очевидно, что радиус-вектор точки является функцией координаты

: Формулы Френе определяют естественный базис трех ортогональных единичных векторов , через производные:

1я формула Френе определяет ***орт касательной***

Направление.

1. По касательной к траектории, как производная радиуса - вектора.
2. В сторону возрастания , независимо от направления движения точки (знака ). Действительно, если направлен по касательной к началу Мо, то отрицательна и производная все равно направлена в сторону возрастания 

Модуль равен 1 как предел отношения хорды к дуге .

2я формула Френе определяет ***орт главной нормали*** **n:**

Направление:

1. нормальна к **τ** как производная от вектора постоянного модуля. Указывает направление движения конца орта **τ** при движении точки М.
2. направлена в сторону вогнутости траектории. Даже, если точка движется к началу Мо  и d**τ** направлено в сторону выпуклости траектории, то производная будет противоположна по направлению ввиду отрицательности

Модуль производной называется *кривизной траектории в точке М*, имеет размерность 1/м, и характеризует скорость конца вектора **τ** при движении точки.

Обратная величина  
  
- называется ***радиусом кривизны траектории*** в точке М. Точка О1 главной нормали на расстоянии от точки М называется центром кривизны траектории в точке М.

***Орт бинормали*** определим так чтобы тройка была правой

Плоскость (**, n)** называется ***cоприкасающейся плоскостью*** к траектории в точке М. Соприкасающуюся плоскость можно получить как предельное положение плоскости окружности, проведенной через три точки М0 М и М1 на траектории при стремлении М0 и М1 к М. Предельное значение радиуса такой окружности равно радиусу кривизны ****а ее центр стремится к центру кривизны О1.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

***Скорость точки***

Иначе

Как видим, скорость касательна к траектории, и ее проекция на касательную равна первой производной от закона движения.

**Ускорение точки**

***Векторный способ***

***Ускорением точки называется вектор***

Заметим, что, если скорость точки постоянна по модулю (равномерное движение), то ***ускорение нормально к скорости*** по свойству векторной производной. Это будет подтверждено в естественном способе.

***Координатный способ***

По заданному закону движения и свойствам векторной производной можно найти проекции ускорения

(16)

модуль и направление вектора ускорения:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

***Естественный способ***

Таким образом, ускорение точки имеет две составляющие (Рис.7)-

**W**

**Wn**

**W**

n

M

Рис.7

***касательную и нормальную:***

***Равномерным***называется движение с постоянной по модулю скоростью:

**W**n

**W**n

**W**=0

**V**

Рис.9

При равномерном движении (Рис.9) касательное ускорение равно нулю. Значит, касательное ускорение ***характеризует изменение модуля скорости точки.*** Полное ускорение точки равно нормальному ускорению. Оно исчезает в точках перегиба траектории и равно нулю при движении точки по прямой. Значит, нормальное ускорение характеризует изменение направление вектора скорости.

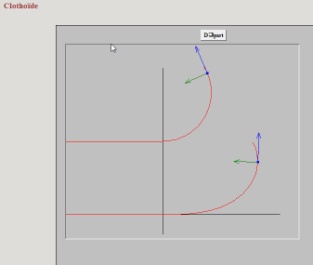
Как известно, ускорение создается силами. Это могут быть активные силы или силы реакции связей. При повороте трамвая нормальное ускорение создается реакцией рельс и зависит от радиуса кривизны траектории. Если на перекрестке прямой участок рельсов состыковать с дугой радиуса R, то нормальное ускорение трамвая (и пассажиров) мгновенно изменится от нуля до конечного значения (верхняя кривая на Рис.10). Так же изменится и сила со стороны рельсов. Конечное изменение силы за малый промежуток времени называется

Рис.10

ударом.

Его чувствуют пассажиры. Чтобы избежать удара, радиус кривизны рельсов на повороте уменьшают плавно, изгибая рельсы по кривой, которая называется «клотоидой». Это наглядно демонстрируется в анимациях

<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/clotho.html>

<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/looping.html>

***Равнопеременным***называется движение точки с постоянным касательным ускорением:

Интегрируя, получаем:

(20)

где С1- постоянная интегрирования, которую следует найти из начальных условий:

Находим: .  Повторное интегрирование дает закон равнопеременного движения точки по кривой:

(22)